Построение кубических сплайнов*

Роман Чепляка

15 декабря 2007 г.

Задана функция $f(x) = e^x \sin x$. Необходимо найти ее кубический сплайн на отрезке $[0, 1]$ с равномерной сеткой $x_k = kh = \frac{k}{n}$, $k = \overline{0, n}$.

```
module Spline where
f x = sin x * exp x
n = 5
h = 1/fromIntegral n
x = [fromIntegral k * h | k <- [0..n]]
```

Укажем, что первая и вторая производные f равны

```
f' x = exp x * (cos x + sin x)
f'' x = 2 * exp x * cos x
```

Зададим сплайн на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ в виде кубического многочлена

$$g_i(x) = y_i + p_i(x - x_i) + \frac{s_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{a_i}{6}(x - x_i)^3.$$

```
g u = y!!i + p!!i * t + s!!i * t*t/2 + a!!i * t*t*t/6 where
  i = head [i | i <- [0..n], x!!i <= u && u <= x!!(i+1)]
  t = u - x!!i
```

Из условий интерполирования получаем $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

```
y = map f x
```

Обозначим $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \Delta p_i = p_{i+1} - p_i$.

```
dy = zipWith (-) (tail y) y
dp = zipWith (-) (tail p) p
```

Требование непрерывности первой производной приводит к равенствам $s_i = \frac{\Delta p_i}{h} - \frac{1}{2}a_i h$.

```
s = zipWith (\a dp -> dp/h-a*h/2) a dp
```

Условия непрерывности функции приводят к уравнениям

$$a_i = \frac{6}{h^2}\left(p_i + p_{i+1} - 2\frac{\Delta y_i}{h}\right).$$

*`Моноширинным` шрифтом выделены исходные тексты на языке Haskell.

```
a = zipWith3 (\p np dy -> 6/(h*h) * (p+np-2*dy/h)) p (tail p) dy
```

Из условия непрерывности второй производной получаем

$$h(p_{i-1}+4p_i+p_{i+1}) = 3\left(\Delta y_{i-1}+\Delta y_i\right), i=\overline{1,n-1}.$$

Наконец, два уравнения получаем из условий интерполирования $g''(0) = f''(0), g''(1) = f''(1)$:

$$p_0+\frac{1}{2}p_1 = \frac{3}{2h}\Delta y_0 - \frac{h}{4}f''(0),$$
$$\frac{1}{2}p_{n-1}+p_n = \frac{h}{4}f''(1)+\frac{3\Delta y_{n-1}}{2h}.$$

Обозначим $F_0 = \frac{3}{2h}\Delta y_0 - \frac{h}{4}f''(0)$, $F_n = \frac{h}{4}f''(1)+\frac{3\Delta y_{n-1}}{2h}$, $C_0 = A_n = 1/2$, $B_0 = B_n = 1$, $A_i = C_i = h$, $B_i = 4h$, $F_i = 3\left(\Delta y_{i-1}+\Delta y_i\right)$.

```
kg = 1/2
kf i | i == 0    = (dy !! 0) * 3 / (2*h) - f''(0)  * h / 4
     | i == n    = f''(1) * h / 4 + (dy !! (n-1)) * 3 / (2 * h)
     | otherwise = 3 * (dy !! (i-1) + dy !! i)
ka i | i == n    = 1/2
     | otherwise = h
kb i | i == 0 || i == n = 1
     | otherwise        = 4*h
kc i | i == 0    = 1/2
     | otherwise = h
```

В итоге приходим к системе n уравнений:

$$\begin{cases} B_0p_0+C_0p_1 = F_0, \\ A_ip_{i-1}+B_ip_i+C_ip_{i+1} = F_i, i=\overline{1,n-1}, \\ A_np_{n-1}+B_np_n = F_n. \end{cases}$$

Для ее решения воспользуемся методом прогонки.

1. $\alpha_0 = -\frac{C_0}{B_0}, \beta_0 = \frac{F_0}{B_0}$.
2. $\alpha_i = -\frac{C_i}{\alpha_{i-1}A_i+B_i}, \beta_i = \frac{F_i-\beta_{i-1}A_i}{\alpha_{i-1}A_i+B_i}, i=\overline{1,n-1}$
3. $p_n = \frac{F_n-\beta_{n-1}A_n}{B_n+\alpha n-1A_n}$
4. $p_i = \alpha_ip_{i+1}+\beta_i, i=\overline{0,n-1}$

```
alpha = map al [0..n-1] where
  al 0 = - kc 0 / kb 0
  al i = - kc i / (alpha !! (i-1) * ka i + kb i)
beta = map be [0..n-1] where
  be  0 = kf 0 / kb 0
  be  i = (kf i - beta !! (i-1) * ka i) / (alpha !! (i-1) * ka i + kb i)
p = map pp [0..n] where
  pp i | i == n    = (kf n - beta !! (n-1) * ka i)
       | otherwise = alpha !! i * p !! (i+1) + beta !! i
```

i	x_i	y_i	Δy_i	A_i	B_i	C_i	F_i	α_i	β_i	p_i	a_i	s_i
0	0.0	0.0000	0.2427		1.0	0.5	1.7199	-0.5000	1.7199	1.0014	1.7773	2.0000
1	0.2	0.2427	0.3383	0.2	0.8	0.2	1.7428	-0.2857	1.9984	1.4370	2.8384	2.3555
2	0.4	0.5809	0.4479	0.2	0.8	0.2	2.3586	-0.2692	2.6370	1.9648	-2.6462	2.9231
3	0.6	1.0288	0.5677	0.2	0.8	0.2	3.0467	-0.2680	3.3764	2.4965	15.3550	2.3939
4	0.8	1.5965	0.6908	0.2	0.8	0.2	3.7755	-0.2680	4.1537	3.2824	-56.1993	5.4649
5	1.0	2.2874		0.5	1.0		5.3282			3.2514		

Теперь найдем производные в точках $z_k = x_k + \frac{h}{2}, k = \overline{0, n-1}$:

$$g_i'(x) = p_i + s_i(x - x_i) + \frac{a_i}{2}(x - x_i)^2,$$

$$g_i''(x) = s_i + a_i(x - x_i).$$

```
z = map (h/2+) x
g'  u = p!!i + s!!i * t + a!!i * t*t/2 where
    i = head [i | i <- [0..n], x!!i <= u && u <= x!!(i+1)]
    t = u - x!!i
g'' u = s!!i + a!!i * t where
    i = head [i | i <- [0..n], x!!i <= u && u <= x!!(i+1)]
    t = u - x!!i
```

i	z_i	$f(z_i)$	$f'(z_i)$	$f''(z_i)$	$g(z_i)$	$g'(z_i)$	$g''(z_i)$
0	0.1	0.1103	1.2100	2.1993	0.1104	1.2103	2.1777
1	0.3	0.3989	1.6885	2.5791	0.3986	1.6867	2.6393
2	0.5	0.7904	2.2373	2.8938	0.7916	2.2439	2.6585
3	0.7	1.2973	2.8375	3.0804	1.2930	2.8127	3.9294
4	0.9	1.9267	3.4556	3.0578	1.9427	3.5479	-0.1550